

Equilibre et stabilité de pliages de mètres rubans à l'aide d'un modèle élément fini de poutre à section flexible.

Pernelle MARONE-HITZ¹, Maverick MARTIN^{1,2}, Stéphane BOURGEOIS¹, Bruno COCHELIN¹, François GUINOT²

¹ LMA, Centrale Marseille, CNRS, UPR 7051, Aix-Marseille Univ, F-13451 Marseille, France

[pernelle.marone-hitz, bruno.cochelin, stephane.bourgeois]@centrale-marseille.fr; martin@lma.cnrs-mrs.fr

² Thales Alenia Space, Cannes, France, Francois.Guinot@thalesaleniaspace.com

Résumé — Les mètres rubans ont la particularité de développer des pliages localisés, provoqués par des flambages. Sous certaines conditions de chargement, plusieurs configurations d'équilibre peuvent coexister, correspondant à des positions et des nombres de plis différents. On propose ici un outil permettant l'étude des positions d'équilibre, ainsi que leur stabilité. Cet outil est basé sur un modèle élément fini de poutre à section flexible et sur la méthode asymptotique numérique.

Mots clés — mètres rubans, poutre à section flexible, éléments finis, méthode asymptotique numérique.

1 Introduction

Les constructeurs de satellites sont à la recherche de solutions innovantes pour assurer le déploiement de structures de plus en plus grandes, avec une contrainte forte en terme de légèreté et de compacité dans la configuration de transport. Les mètres rubans offrent des possibilités originales de part leur capacité à se plier localement par aplatissement de la section, tout en restant dans le domaine élastique. Néanmoins, leur comportement exhibe de nombreuses instabilités et il est nécessaire de se munir d'outil de modélisation fiable pour prédire les positions d'équilibre et leur stabilité. L'approche classique consiste à utiliser des modèles éléments finis de coques en statique ou dynamique, en introduisant de l'amortissement numérique pour faire face aux instabilités liées à l'existence de nombreux points limites et bifurcations. Certains travaux font état de l'utilisation de méthodes plus adaptées de continuation [5] mais en pratique, ces modélisations sont très difficiles à mener (pilotage délicat, lourdeur des modèles de coques et sensibilité aux conditions limites).

Un modèle original de poutre à section flexible, capable de rendre compte d'un aplatissement total de la section, a récemment été proposé pour essayer de remédier à ces difficultés ([2], [1], [3]). La formulation énergétique de ce modèle à faible nombre de paramètres cinématiques a permis une implémentation simple dans le logiciel de calcul par éléments fins COMSOL [11], sans avoir de développement numérique à effectuer. Cette implémentation a permis de montrer que le modèle était capable de simuler de nombreux phénomènes : formation et disparition de plis, migration et dédoublement de plis... Même si les calculs s'avèrent plus faciles à mener par comparaison aux approches classiques, les nombreuses instabilités qui se manifestent par des sauts de solutions montrent la nécessité de se munir d'un outil de détermination des diagrammes d'équilibre.

Dans ce travail, on propose une formulation élément fini du modèle de poutre à section flexible [3] et on présente son implémentation dans le logiciel de continuation Diamanlab [10], basé sur la méthode asymptotique numérique [4].

2 Modèle de poutre à section flexible

On trouvera une description complète du modèle dans les travaux de Picault et al. [3]. Partant d'un modèle de coque, le ruban est assimilé dans sa configuration initiale à une poutre à section mince circulaire dont la ligne moyenne, passant par le barycentre des sections, est droite (Figure 1). L'axe (O, \mathbf{e}_1) est choisi de façon à passer par la ligne moyenne, avec O le barycentre d'une des sections origines. Le vecteur unitaire \mathbf{e}_3 , orthogonal à \mathbf{e}_1 , est choisi de façon à ce que le plan $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ soit le plan de symétrie

du ruban. Le vecteur \mathbf{e}_2 est défini tel que le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ soit orthonormé direct.

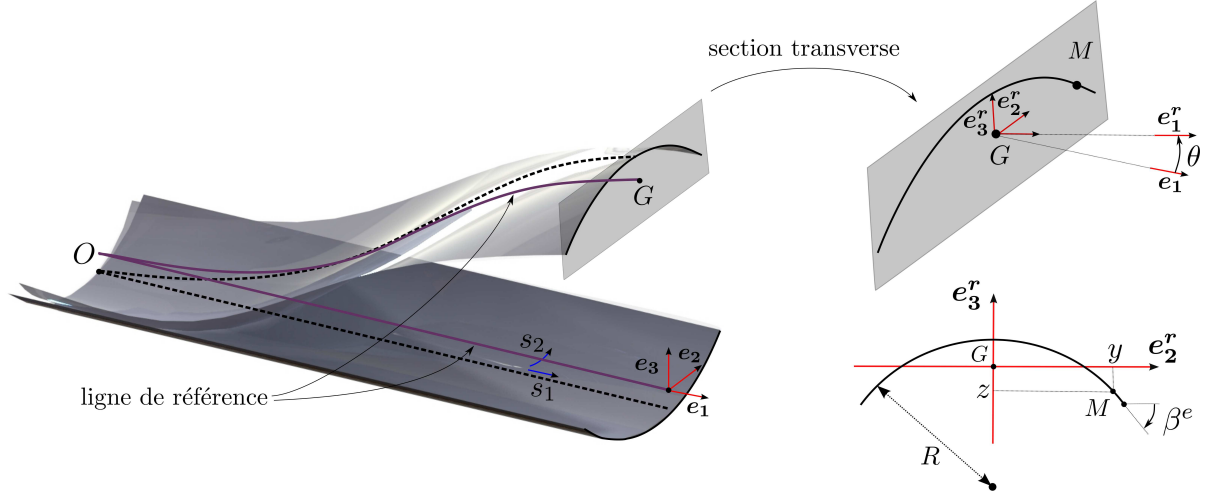


FIGURE 1 – Description du mètre ruban et de la cinématique choisie

La coque est paramétrée par s_1 et s_2 qui sont respectivement la coordonnée curviligne le long de la ligne moyenne et de la courbe section : $(s_1, s_2) \in [0, L] \times [-a, a]$, où L est la longueur initiale de la ligne moyenne et $2a$ la longueur initiale de la courbe section.

Pour réduire le modèle de coque à un modèle de poutre à section flexible, les hypothèses suivantes sont introduites :

- (i) la courbe section reste dans un plan après déformation,
- (ii) le plan de la section reste orthogonal au vecteur tangent à la déformée de la ligne moyenne,
- (iii) la courbe section est inextensible et reste circulaire de rayon R (Figure 1) pouvant varier en temps et en espace.

Le vecteur position d'un point M de la coque dans la configuration déformée est alors décomposé en deux parties :

$$\mathbf{OM}(s_1, s_2) = \mathbf{OG}(s_1) + \mathbf{GM}(s_1, s_2), \quad (1)$$

où G est le barycentre de la section à laquelle appartient M . On ne s'intéresse de plus qu'aux mouvements plans pour lesquels le ruban reste symétrique par rapport au plan $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Toutes ces hypothèses conduisent aux expressions suivantes ([2], [3]) :

$$\begin{cases} \mathbf{OG} = (s_1 + u_1(s_1))\mathbf{e}_1 + u_3(s_1)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{GM} = y(s_1, s_2)\mathbf{e}_2 + z(s_1, s_2)\mathbf{e}_3^r(s_1), \\ y(s_1, s_2) = \frac{a}{\beta^e(s_1)} \sin\left(\beta^e(s_1) \frac{s_2}{a}\right) \text{ et } z(s_1, s_2) = \frac{a}{\beta^e(s_1)} \left(\frac{\sin(\beta^e(s_1))}{\beta^e(s_1)} - \cos\left(\beta^e(s_1) \frac{s_2}{a}\right) \right), \end{cases} \quad (2)$$

avec $u_1(s_1)$ et $u_3(s_1)$ les déplacements des points de la ligne moyenne, y et z les coordonnées du point M dans le repère local $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ qui suit la section dans son mouvement de rotation et $\beta^e(s_1) = a/R(s_1)$ l'angle d'ouverture de la section lié à la courbure transverse (Figure 1). Par rapport aux travaux antérieurs [2] et [3], on suppose de plus que la section reste faiblement courbée et on choisit de paramétrer la rotation de la section avec un quaternion unitaire qui, dans la cas d'un mouvement plan, n'a que deux composantes non nulles $q_0(s_1)$ et $q_2(s_1)$. On a alors :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_3^r(s_1) = 2q_0q_2\mathbf{e}_1 + (q_0^2 - q_2^2)\mathbf{e}_3, \\ y(s_1, s_2) = s_2 \quad \text{et} \quad z(s_1, s_2) = \beta^e \frac{s_2^2}{2a}. \end{cases} \quad (3)$$

Le modèle de poutre à section flexible comprend ainsi cinq paramètres cinématiques : $u_1(s_1)$, $u_3(s_1)$, $q_0(s_1)$, $q_2(s_1)$ et $\beta^e(s_1)$. Ces paramètres doivent respecter des contraintes liées à l'orthogonalité de la section par rapport à la ligne moyenne et au caractère unitaire du quaternion :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_3^T \cdot \mathbf{OG}_{,1} = 0 \\ q_0^2 + q_2^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

De façon analogue à ce qui est présenté dans les travaux antérieurs [2] et [3], les hypothèses cinématiques sont introduites dans l'énergie de déformation de la coque. On fait les hypothèses que cette coque ne subit que des petites déformations élastiques et ne travaille en membrane qu'en traction-compression dans le sens longitudinal du ruban. Après intégration dans la section suivant s_2 , on obtient une expression analytique simplifiée de la densité linéique d'énergie de déformation du modèle de poutre à section flexible. Les contraintes (4) sont introduites dans l'énergie potentielle par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange λ_T et λ_q . Finalement, la formulation faible est obtenue en recherchant les points de stationnarité de la fonctionnelle énergie potentielle.

3 Discrétisation éléments finis

La formulation faible fait apparaître sept paramètres à discrétiser pour la modélisation par éléments finis : cinq paramètres cinématiques et deux multiplicateurs de Lagrange. On cherche dans un premier temps à construire un élément simple de bas degré. Suivant les travaux de Zupan [7] sur la construction d'un élément fini de poutre de Reissner-Simo [8] en grandes rotations paramétrées par des quaternions, on choisit des interpolations du premier degré pour u_1 , u_3 , q_0 , q_2 et λ_q (multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte du quaternion unitaire). Le paramètre λ_T , associé à la contrainte d'orthogonalité de la section par rapport à la ligne moyenne, représente physiquement l'effort tranchant pour un modèle de poutre classique. On choisit pour ce dernier une interpolation constante pour être en accord avec le degré de l'effort normal déduit des interpolations de u_1 et u_3 dans le cas d'une poutre à section indéformable. Pour β^e , qui intervient par le biais de sa dérivée seconde dans l'énergie de déformation, on choisit une interpolation de Hermite de degré 3. L'élément fini obtenu, possédant 15 degrés de libertés, est implémenté dans le logiciel Diamanlab [10], logiciel de continuation de solution par la méthode asymptotique numérique. Le choix des quaternions pour représenter les grandes rotations facilite la mise sous forme quadratique du problème [6] (formalisme facile à intégrer dans Diamanlab) et permet de s'affranchir des singularités liées aux autres paramétrisations classiques (angles d'Euler...).

4 Exemple d'application : pliage par flexion d'un mètre ruban

On considère un ruban de longueur $L = 1170$ mm, d'épaisseur $h = 0.15$ mm, avec une courbe section de longueur $2a = 60$ mm et un angle d'ouverture initial $\beta_0^e = 0.6$ rad (rayon initial $R_0 = 50$ mm). On impose aux sections extrémités une rotation, par l'intermédiaire de la deuxième composante du quaternion q_2 , tout en laissant libre la section de s'aplatir. Concrètement, les conditions limites appliquées au problème de poutre à section flexible sont :

$$u_1(0) = u_3(0) = \beta_{,1}^e(0) = 0, \quad q_2(0) = \lambda, \quad u_3(L) = \beta_{,1}^e(L) = 0, \quad q_2(L) = -\lambda,$$

les autres degrés de liberté étant laissés libres et λ étant le paramètre de chargement. On représente Figure 2 le diagramme de bifurcations associé à la courbe de réponse du moment $M_2(0)$ en fonction de $q_2(0) = \sin(\frac{\theta(0)}{2})$ (avec θ l'angle de rotation de la section autour de \mathbf{e}_2), ainsi que les déformées associées à chaque branche. Les déformées 3D sont reconstruites à partir des résultats obtenus sur le modèle de poutre en utilisant la cinématique donnée par les équations (1), (2) et (3). Le diagramme de bifurcation fait apparaître une branche fondamentale pour laquelle l'aplatissement de la section est uniforme le long du ruban. Les autres branches qui partent de la branche fondamentale correspondent à l'apparition de plis localisés. Pour la première branche, on constate l'apparition d'un pli, pour la deuxième l'apparition d'un pli et demi (un au milieu et un demi à une extrémité), pour la troisième deux plis... Toutes ces branches bifurquées convergent vers un plateau à moment constant qui correspond au moment de propagation d'un pli [5].

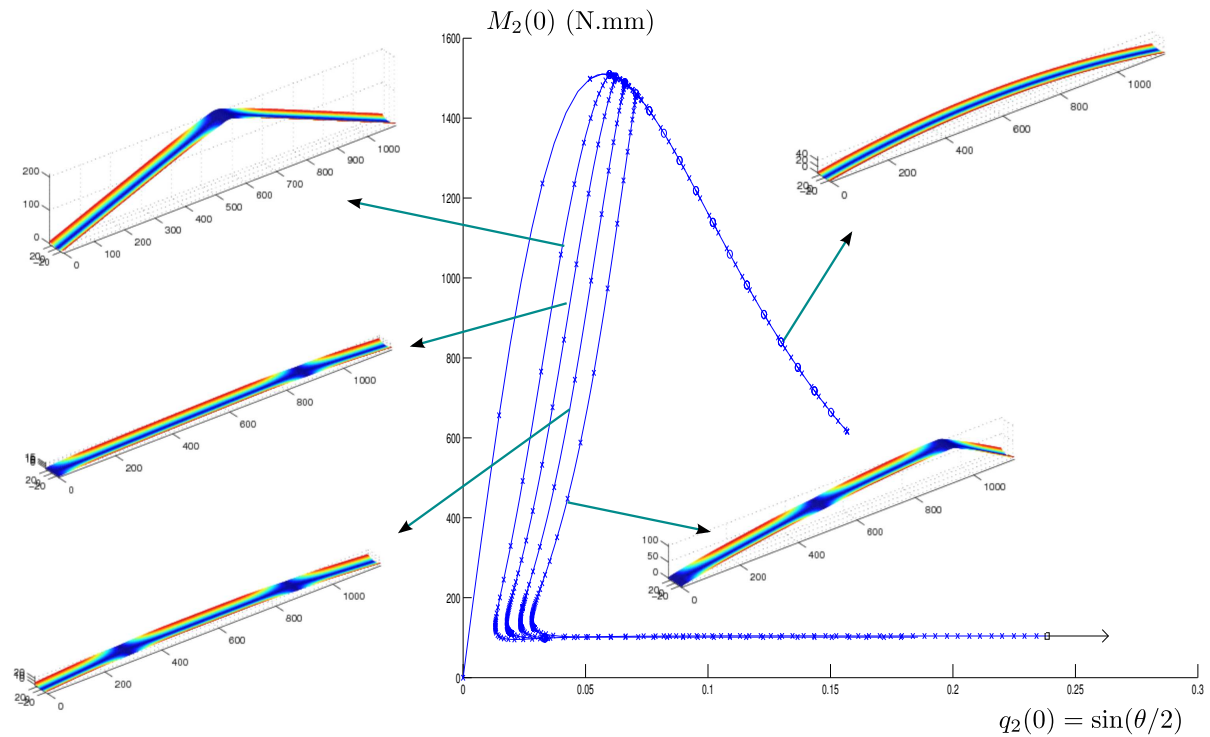


FIGURE 2 – Pliage par flexion d'un mètre-ruban avec aplatissement libre des sections aux extrémités. Diagramme de bifurcations et déformées associées à chaque branche.

5 conclusion

Le modèle proposé d'élément fini de poutre à section flexible, implémenté dans Diamnalab, permet de simplifier l'étude des branches d'équilibres associées aux diverses configurations de pliages de mètres rubans. Une étude plus avancée est nécessaire pour évaluer les performances de l'élément. Pour aboutir à un outil complet, l'implémentation d'un modèle 3D de poutre à section flexible incluant la torsion et le gauchissement est à l'étude.

Références

- [1] S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot, E. Picault, *Buckling analysis of tape springs using a rod model with flexible cross-sections*, Eur. J. Comput. Mech./ Rev. Eur. Méc. Numér., 21 (3-6), 184-194, 2012.
- [2] F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, L. Blanchard. *A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. Application to the folding of tape springs*, Int. J. Solids Structures, 49 (1), 73-86, 2012.
- [3] E. Picault, P. Marone-Hitz, S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot. *A planar rod model with flexible cross-section for the folding and the dynamic deployment of tape springs : improvements and comparisons with experiments.*, Int. J. Solids Structures, 51 (18), 3226-3238, 2014.
- [4] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, *Méthode Asymptotique Numérique*, Lavoisier, 2007.
- [5] K.A. Seffen, S. Pellegrino. *Deployment dynamics of tape springs*, Proc. R. Soc. Lond. A, 455, 1003-1048, 1999.
- [6] A. Lazarus, J.T. Miller, P.M. Reis, *Continuation of equilibria and stability of slender elastic rods using an asymptotic numerical method*, J. Mech. Physics Solids, 61 (8), 1712-1736, 2013.
- [7] E. Zupan, M. Saje, D. Zupan, *On a virtual work consistent three-dimensional Reissner–Simo beam formulation using the quaternion algebra*, Acta Mech. 224, 1709–1729, 2013.
- [8] J.C. Simo, *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 49, 55-70, 1985.
- [9] <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>
- [10] I. Charpentier, B. Cochelin, K.Lampoh, *Diamanalab - An interactive Taylor-based continuation in Matlab*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853599>.
- [11] COMSOL AB, COMSOL Multiphysics User's Guide v4.2, Stockholm, Sweden, September 2011.